3. 曲线的局部理论

回忆 曲线段的定义：

$$\gamma:\ (a,b) \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3$$

(1) γ 是双射，

(2) $\gamma(t)=(x(t), y(t), z(t))$ 是光滑向量函数，

(3) $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \neq 0,\quad \forall t\in(a,b)$。

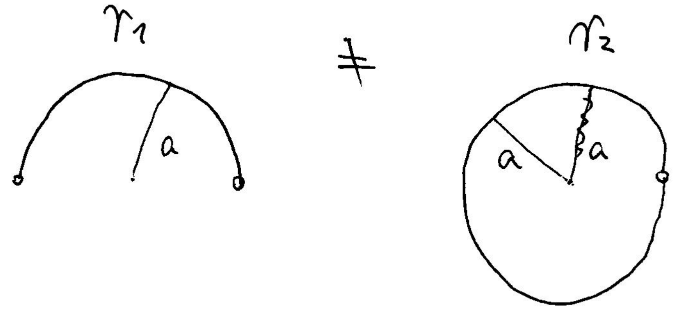
在下文中：曲线均指曲线段，除非特别说明。

例（书本中例1.4，页15）

$a>0$

$$\gamma_1(t) = (a\cos t,\ a\sin t),\qquad t\in \underline{(0,\pi)}\quad （书中为(0, 2\pi)）$$

$$\gamma_2(t) = (a\cos 2t,\ a\sin 2t),$$



例：$\gamma:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$　　$C \doteq \mathrm{im}(\gamma)$：twisted cubic

$$t \longmapsto (t, t^2, t^3)$$

一般地可以考虑：$\gamma:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$　$(n\geq 2)$

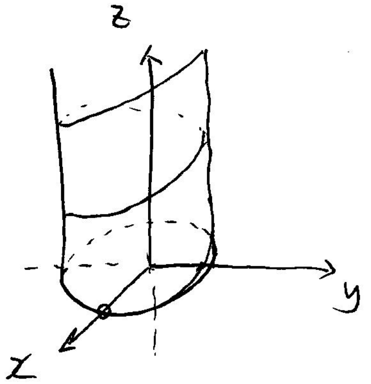
$$t \longmapsto (t, t^2, \dots, t^n)$$

习题：写出这曲线的一组定义方程。

例：(例3.2 书页22)，圆柱螺旋线

$(a>0,\ b\geq 0)$

$$r(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$



问题：将圆柱面沿面上一直线（如：xz-平面与柱面的交线）

剪开，然后将这柱面"推平"成一平面纸片。

问1：试写出一个合适的"推平"映射

问2：在推平后的平面纸片上，螺旋线变成了什么样的曲线？(平面)

三维的(空间)

问题：曲线是如何弯曲的？

粗略地简单告诉你们：

在点 $P=r(0)$ 的一个小邻域：

$$r = r(0) + t\dot{r}(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{r}(0) + \frac{t^3}{6}\dddot{r}(0) + \frac{t^4}{24}\ddddot{r}(0) + \cdots$$

所以 曲线在点P处弯曲（即非直线）$\Longleftrightarrow$ 如果 r 在这邻域上不等

吻合于切线 $r(0)+t\,\dot{r}(0)$.

直线　　　　　　　　　　曲线

换句话说，向量函数 $\dfrac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}$ 是否为常值函数为判定C是否为直线的充要条件.

$$\frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}}\left(\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)\right)$$

简单命题：$r_1(t),\ r_2(t)$，$t\in(a,b)$ 为两曲线.

若 $r_1(t)$ 与 $r_2(t)$ 相差一个平移，即

$$r_2 = r_1 + v, \quad v\in\mathbb{R}^3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{r}_2 = \dot{r}_1$$

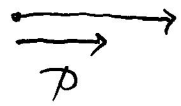
那么如何判定 r_1 与 r_2 相差一个刚体运动/欧氏等距变换呢？

即 $r_2 = A\cdot r_1 + v$, 对某 $(A,v)\in SO(3)\ltimes\mathbb{R}^3$
$(O(3)\ltimes\mathbb{R}^3)$.

先考虑 $\mathbb{R}^2$ 中曲线，做物理实验如下：

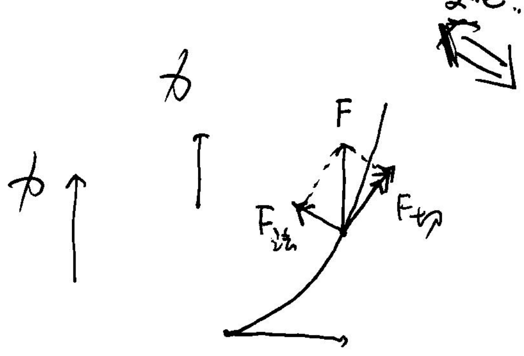
0) 点粒子沿 x-轴做速度为1的匀速直线运动.

1) (i) 若力 F 在时刻 t 开始沿 x-轴方向作用, 则粒子速度变大, 但方向不变, 其运动轨迹仍为直线



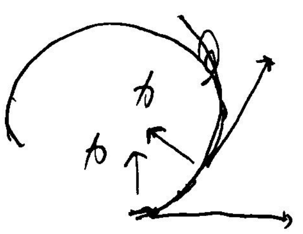
(ii) 若力在速度方向的垂直方向/法方向, 即 y 轴方向, 作用于该粒子, 则运动轨迹开始弯曲.

(ii) a', 力始终垂直于运动方向, 但力大小变化. (而速度恒为1)



(ii) a 若力大小与方向不变, 则运动轨迹为抛物线 (如重力作用)
(而且~~速度~~加速)

(ii) b, 若力大小不变, 但作用方向始终垂直于~~速度~~切线方向. 则运动轨迹为圆, 且速度恒为1.



$\boxed{\text{总结}}$: 给定平面曲线 C, 若当点粒子在开始位置 $r(a)$, 沿方向 $r'(0)$, 速度为1开始运动. 若要得到运动轨迹为 C, 可在~~法方向~~加一个~~F(s)的~~力, 大小为 $F(s)$, 方向始终垂直于运动法方向的力, 且速度恒为1。若粒子在初始时刻在 ~~...~~ 不同于 $r(0)$ 的位

置，初始方向亦不同于 $\dot{\gamma}(0)$，但速度为1，且始终于大小为 $F(s)$，方向始终垂直于运动方向的力作用粒子，得轨迹曲线 C'。则必有 $C' \overset{合同}{\simeq} C$，即 $\gamma' = A\cdot\gamma + v$，$(A, v) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$.

牛顿力学定律：$\boxed{F = ma}$　　a 加速度，为位移的两阶导，为速度的一阶导。

所以我们要考察

(1) 以弧长 $s = \int_a^t |\gamma'(u)|du$ 为参数，

则 $|\gamma'(s)| = 1$.

(2) $\ddot{\gamma}(s)$

由于：$\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\rangle = 1$，求导

$\Rightarrow$　$\ddot{\gamma}(s) \perp \dot{\gamma}(s)$

切方向

定义 $k(s) \triangleq \|\ddot{\gamma}(s)\|$，即 $\boxed{曲率为力的~~大~~大小}$

若引入 Frenet 标架 $\{\gamma(s); e_1(s), e_2(s)\}$，

$e_1(s) = t(s) \parallel \dot{r}(s)$, 单位切向量

$e_2(s) = n(s)$, 单位法向量

则 $\cancel{k(s)n = \frac{\ddot{r}(s)}{n(s)}}$ $\quad \ddot{r}(s) = k(s)\cdot e_2(s)$

问题：如何从数学上说明 $k(s)$ 是一个曲线自身的一个几何量？

方法一：这量不依赖于重新参数化.（比较这命题与§2中切向线良好定义命题）

命题：设 $r:(a,b) \to C \subset R^2$ 为曲线.

$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$

设 $\tilde{r}:(\tilde{a},\tilde{b}) \to C$ 为这曲线的另一参数化。~~则有~~

$$\tilde{t} \longmapsto (\tilde{x}(\tilde{t}), \tilde{y}(\tilde{t}))$$

令 $\varphi = r^{-1}\circ\tilde{r} : (\tilde{a},\tilde{b}) \to (a,b)$.

$$\tilde{t} \longmapsto \varphi(\tilde{t})$$

则有
$$\frac{\tilde{x}'(\tilde{t})\tilde{y}''(\tilde{t}) - \tilde{x}''(\tilde{t})\tilde{y}'(\tilde{t})}{\{(\tilde{x}'(\tilde{t}))^2 + \tilde{y}'(\tilde{t})^2\}^{3/2}}$$

$$= \frac{x'\circ\varphi'(\tilde{t})\cdot y''\circ\varphi(\tilde{t}) - x''\circ\varphi(\tilde{t})\cdot y'\circ\varphi(\tilde{t})}{\{(x'\circ\varphi(\tilde{t}))^2 + (y'\circ\varphi(\tilde{t}))^2\}^{3/2}}$$

（比较习题二，第2题 k 的表达式！）

证明: $\tilde{r} = r \circ \varphi$

$$\Rightarrow \quad \tilde{r}' = \varphi' \cdot (r \circ \varphi)'$$

$$\tilde{r}'' = \varphi'' \cdot (r \circ \varphi)' + \varphi'^2 \cdot (r \circ \varphi)''$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{x}' = \varphi' \cdot (x \circ \varphi)' \\ \tilde{y}' = \varphi' \cdot (y \circ \varphi)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = \varphi'' \cdot (x \circ \varphi)' + \varphi'^2 \cdot (x \circ \varphi)'' \\ \tilde{y}'' = \varphi'' \cdot (y \circ \varphi)' + \varphi'^2 (y \circ \varphi)'' \end{cases}$$

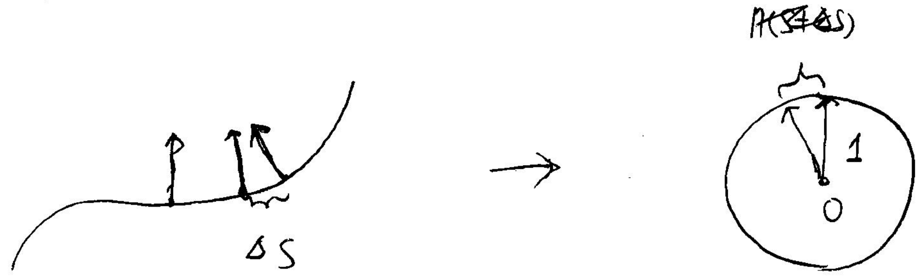
代入 左式:

$$\frac{\varphi' \cdot (x \circ \varphi)' \left[\varphi'' \cdot (y \cdot \varphi)' + \varphi'^2 (y \cdot \varphi)'' \right] - \left[\varphi'' (x \cdot \varphi)' + \varphi'^2 \cdot (x \cdot \varphi)'' \right] \cdot \left(\varphi' \cdot (y \circ \varphi)' \right)}{\left\{ \left[\varphi' \cdot (x \cdot \varphi)' \right]^2 + \left[\varphi' \cdot (y \circ \varphi)' \right]^2 \right\}^{3/2}}$$

$$= \frac{(\varphi')^3 \left[(x \cdot \varphi)' (y \cdot \varphi)'' - (x \cdot \varphi)'' (y \cdot \varphi)' \right]}{(\varphi')^3 \left\{ (x \circ \varphi)'^2 + (y \cdot \varphi)'^2 \right\}^{3/2}} = 右式$$

#

方法二：高斯映照



$$\begin{array}{ccc} g: \quad r & \longrightarrow & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ t & \longmapsto & n(t) \end{array}$$

令：$\quad k(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{d(g(t_0), g(t))}{d(r(t_0), r(t))}$

证明：$\quad d(r(t_0), r(t)) = \int_{t_0}^{t} |r'(u)| du \qquad (1)$

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} (-\dot{y}(t), \dot{x}(t)) \qquad (2)$$

$$d(n(t_0), n(t)) = \int_{t_0}^{t} |n'(u)| du \qquad (3)$$

不妨取弧长参数：$\quad (1) = s - s_0$

$t = s$

$(2) = \int_{s_0}^{s}$

(2):

$$\langle n(s), n(s) \rangle = 1$$

$$\cancel{\langle n(s), t(s) \rangle = 0}$$

$$\overset{\text{求导}}{\Longrightarrow} \quad \dot{n}(s) \perp n(s) \quad \text{i.e} \quad \dot{n}(s) = \lambda(s)\, t(s)$$

$$\langle n(s), t(s) \rangle = 0$$

$$\overset{\text{求导}}{\Longrightarrow} \quad \lambda(s) = -k(s)$$

(3):

$$\int_{s_0}^{s} |-k(u)\, t(u)|\, du$$

$$= \int_{s_0}^{s} |k(u)|\, du$$

故
$$\lim_{s \to s_0} \frac{d(g(s_0), g(s))}{d(s_0, s)} = \lim_{s \to s_0} \frac{\int_{s_0}^{s} k(u)\,du}{s - s_0}$$

$$= k(s_0)$$

#

问题: 对于平面曲线而言, $k(s) > 0$, (s是弧~~长参数~~ 能确定这曲线? 在

在只相差一个平移, 旋转的意义下

求解运动方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = e_1(s) & (*1) \\[2ex] \dfrac{d}{ds}\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix} & (*2) \end{cases} \qquad s \in [a, b)$$

其中 $k(s) > 0, \forall s$ 是光滑函数。

由一阶线性(常)微分方程 解的理论 知：

(*2)：解存在，且由初值 $\begin{pmatrix} e_1(a) \\ e_2(a) \end{pmatrix}$ 唯一确定，故任意两解

~~(设 $a \in (a, b)$)~~

相差一个旋转.

确定好 $e_1(s)$，再由方程(*1) 解 $r(s)$，其解由初值 $r(a)$

唯一确定，故任意两解 相差一个平移.

断言：解 给定初值 $\{\cancel{r(a)}\ p; v_1, v_2\}$ $\quad p \in \mathbb{R}^2$，v_1, v_2

在 p 处的正交标架，则 $\underbrace{\text{唯一解}}_{\text{上述方程组}}$ $\{r(s); e_1(s), e_2(s)\}$ 满足

(1) $r: [a, b') \to C \subset \mathbb{R}^2$ 是曲线 平面 $\quad b' \le b$

而以 s 为其弧长参数.

(2) $\{r(a) = p, \quad (e_1(a), e_2(a)) = (v_1, v_2)$

~~(3) s 为弧~~

(3) $\{r(s); e_1(s), e_2(s)\}$ 是 曲线 C 的 Frenet 标架.

~~(4) $k(s)$~~ 且 $k(s)$ 为 曲线 C 的曲率.

证明: ~~由~~ $\forall s$, $\{e_1(s), e_2(s)\}$ 是一正交标架, 即

$$\langle e_1(s), e_1(s)\rangle = \langle e_2(s), e_2(s)\rangle = 1$$

$$\langle e_1(s), e_2(s)\rangle = 0$$

(而且定向与初始定向吻合)

记 $g_{ij}(s) = \langle e_i(s), e_j(s)\rangle$, $1 \le i, j \le 2$

$$\xrightarrow[+(*2)]{对g求导}$$

$$\cancel{\frac{d\, g_{ij}(s)}{ds}}$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \qquad (*2)'$$

仍由一阶线性常微分方程组理论, 知

$(*2)'$ 解存在, 唯一由初值确定.

但显然 $\{g_{ij}(s)\} = (\delta_{ij})$ 满足方程 $(*2)'$ 和初值条件.

故有 $g_{ij}(s) = \delta_{ij}$.

(2) 由$(*1)$知. $\left|\frac{dr}{ds}\right| = |e_1(s)| = 1$, 故 s 为弧长参数

故有 $t = \dot{r} = e_1$

由 (※2) 知 $n = e_2$ 且

$$\dot{t} = kn$$

即 $k = |\dot{t}|$ 为曲率.

#

定理：(~~看~~) 令 $r_1(s), r_2(s) \subset \mathbb{R}^2$ 为区间 (a,b) 上两弧长参数.

则
(1) ∃ $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 合同变换, s.t

$$r_2 = T \circ r_1$$

$$\iff k_2(s) = k_1(s) \quad (s\text{为弧长参数})$$

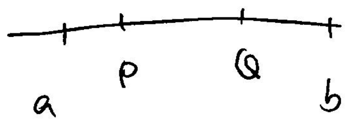
记 $C_1 = im(r_1)$, $C_2 = im(r_2)$

(2) ∃ 等距变换

$$f: (C_2, d_{C_2}) \xrightarrow{\sim} (C_1, d_{C_1}).$$

证明：先证(2). ~~不妨设~~ 事实上

$$(a,b) \xrightarrow{r_1} \underset{im(r_1)}{\overset{\shortparallel}{C_1}} \quad \text{即为等距变换}$$



即 ∀ $P<Q \in (a,b)$

$$d_{C_1}(r_1(P), r_1(Q)) = \int_P^Q \underset{1}{\underset{\shortparallel}{|\dot r_1(s)|}} ds = Q-P = d(P,Q).$$

所以 $\underbrace{(C_1, d_{C_1}) \simeq ((a,b), \text{标准直线距离}) \simeq (C_2, d_{C_2})}_{\sim}$

(1) (⇒) 直接验证

(⇐) 记法5前一命题证明类似.

#